

Höhere Mathematik I Klausur

03.03.2026

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ	Portfolio	Note
erreichte Punkte													
mögliche Punkte	3	3	4	6	4	6	4	4	2	4	40		

Name, Vorname	
Matrikelnummer	
Unterschrift	

Ich stimme der Veröffentlichung der Prüfungsnote (Portfolio)
unter Angabe der Matrikelnummer auf Digicampus zu.

Ja ☐ Nein ☐

Bitte schreiben Sie auf **jedes einzelne Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer (auch auf die Aufgabenblätter) und beginnen Sie jede der Aufgaben auf einer neuen Seite. Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**.

Zugelassenes Hilfsmittel ist ein (beidseitig) handbeschriebenes DIN-A4 Blatt.

Aufgabe 1: Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3 Punkte

Aufgabe 2:

(a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ für die gilt:

$$z^7 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}i.$$

(b) Skizzieren Sie die folgende Menge in der komplexen Ebene:

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z) \wedge \operatorname{Re}(z) \leq -1 \wedge |z+1| \geq 1\}.$$

3 (= 1.5+1.5) Punkte

Aufgabe 3: Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n c^n,$$

wobei $0 < c < 1$.

(a) Beweisen Sie mittels ε -Kriterium, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist, und geben Sie den Grenzwert an.

(b) Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Konvergiert die Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Geben Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

an. Begründen Sie Ihre Antwort.

4 (= 1.5+1.5+1.0) Punkte

Aufgabe 4: Seien $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, mit einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, sowie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\ln(x+3)}$.

- (a) Geben Sie das ε - δ Kriterium für die Stetigkeit von g in einem Punkt $x_0 \in I$ an.
- (b) Zeigen Sie, dass f stetig ist.
- (c) Zeigen Sie, dass f monoton fallend ist.
- (d) Bestimmen Sie den Wertebereich W_f der Funktion f . Begründen Sie Ihre Antwort.
- (e) Zeigen Sie mithilfe des klassischen Mittelwertsatzes, dass es ein $L > 0$ gibt, welches

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \quad \forall x, y \in [0, \infty)$$

erfüllt.

- (f) Begründen oder widerlegen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

6 (= 0.5+1+1+1+2+0.5) Punkte

Aufgabe 5: Betrachte $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 e^x$.

- (a) Geben Sie das Taylorpolynom 3. Grades $T_3(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.
- (b) Berechnen Sie eine Annäherung für e , indem Sie $T_3(x)$ an einer geeigneten Stelle x^* auswerten. Geben Sie eine Abschätzung des Fehlers $|f(x^*) - T_3(x^*)|$ an.

4 (= 2+2) Punkte

Aufgabe 6: Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} dx,$

(b) $\int \exp(x) \sin(x) dx.$

Hinweis: Sie können die Substitution $y = \sqrt{1-x}$ benutzen, um das Integral im Teil (a) zu vereinfachen. Es gilt $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.

6 (= 3+3) Punkte

Aufgabe 7:

- (a) Gegeben seien

$$U_1 := \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}, \quad U_2 = \left\{t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Zeigen Sie, dass U_1 und U_2 Untervektorräume von $\mathbb{R}^4$ sind. Begründen oder widerlegen Sie, dass $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist.

- (b) Bestimmen Sie für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgenden Vektoren v_1 , v_2 und v_3 linear unabhängig sind.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Untersuchen Sie, ob $\{f_1, f_2\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert durch

$$f_1(t) = \sin(t), \quad f_2(t) = \sin(2t), \quad t \in \mathbb{R},$$

linear unabhängig ist.

4 (= 2+1+1) Punkte

Aufgabe 8: Betrachten Sie die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 4x_2 \\ 2x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}$.

(a) Geben Sie die Abbildungsmatrix an und bestimmen Sie deren Rang.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns und Bildes der Abbildung.

4 (= 2+2) Punkte

Aufgabe 9: Sei

$$\mathcal{U} = \{p \in C^\infty([-1, 1]) : p(t) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

als Unterraum von $C^\infty([-1, 1])$ gegeben.

Wir betrachten das Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt$.

Bestimmen Sie die beste Approximation p^* von $q(t) = t^2 - t$ in $\mathcal{U}$, d.h.

$$\|p^* - q\|_2 = \min_{p \in \mathcal{U}} \|p - q\|_2$$

wobei $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Hinweis: Eine orthogonale Basis von $\mathcal{U}$ ist durch $\{1, t\}$ gegeben.

2 Punkte

Aufgabe 10: Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $a \in \mathbb{R}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a & -1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A in Abhängigkeit von a mittels Gauß-Algorithmus.

(b) Berechnen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von a .

4 (= 2.5+1.5) Punkte